Aufgabe 7.70

Die Ebene E sei durch die Punkte $(1,5,3)$, $(2,-1,0)$ und $(3,3,1)$ gegeben.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene E in Parameterform und in parameterfreier Form!
b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen und die Schnittgeraden der Ebene E mit den Koordinatenebenen!
c) Bestimmen Sie die Schnittwinkel der Ebene E mit den Koordinatenachsen und -ebenen!
d) Bestimmen Sie die Gleichung des Lotes von $P(-13,14,-23)$ auf die Ebene E und den Lotfußpunkt!
e) Wie groß ist der Abstand des Punktes $P(-13,14,-23)$ von der Ebene E?

Lösung:

a) Richtungen in der Ebene z.B. $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-6\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}\mathrel{\widehat{=}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Parameterform der Ebenengleichung: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-6\\-3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-6\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-6&-3\\1&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-5\\z-3\end{pmatrix}=3x-3-2y+10+5z-15=0$$

parameterfreie Form der Ebenengleichung: $3x-2y+5z=8$

b) x-Achse: $y=z=0$, also Schnitt für $3x=8$, $x=\frac{8}{3}$, Schnittpunkt $\left(\frac{8}{3},0,0\right)$

y-Achse: $x=z=0$, also Schnitt für $-2y=8$, $y=-4$, Schnittpunkt $(0,-4,0)$

z-Achse: $x=y=0$, also Schnitt für $5z=8$, $z=\frac{8}{5}$, Schnittpunkt $\left(0,0,\frac{8}{5}\right)$

x-y-Ebene: $z=0$, also Schnitt für $3x-2y=8$, $z=0$, $\quad y=-4+\frac{3}{2}x$, $z=0$,

d.h. Schnittgerade $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3/2\\0\end{pmatrix}$

x-z-Ebene: $y=0$, also Schnitt für $3x+5z=8$, $y=0$, $\quad z=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}x$, $y=0$,

d.h. Schnittgerade $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\8/5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-3/5\end{pmatrix}$

y-z-Ebene: $x=0$, also Schnitt für $-2y+5z=8$, $x=0$, $\quad y=-4+\frac{5}{2}z$, $x=0$,

d.h. Schnittgerade $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\5/2\\1\end{pmatrix}$

c) Ebenen schneiden sich im gleichen Winkel wie ihre (jeweils zu den Ebenen orthogonalen) Stellungsvektoren, also ergibt sich

Schnittwinkel von E mit x-y-Ebene: $\arccos \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \arccos \frac{5}{\sqrt{38}} \approx 35.80^\circ$,

Schnittwinkel von E mit x-z-Ebene: $\arccos \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \arccos \frac{-2}{\sqrt{38}} \approx 108.93^\circ$

(Es ist nicht gesagt, welcher der beiden Schnittwinkel der Ebenen angegeben werden soll, also kann auch 71.07° angegeben werden.),

Schnittwinkel von E mit y-z-Ebene: $\arccos \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \arccos \frac{3}{\sqrt{38}} \approx 60.88^\circ$.

Die Stellungsvektoren der Koordinatenebenen sind auch die Richtungsvektoren der Koordinatenachsen, also ergeben sich als Schnittwinkel mit den Koordinatenachsen die zu 90° komplementären der eben ausgerechneten Winkel, d.h. mit der z–Achse 54.20°, mit der y–Achse 18.93° und mit der x–Achse 29.12°.

d) Auf $3x - 2y + 5z = 8$ steht $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ senkrecht, d.h. Lot ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} -13 \\ 14 \\ -23 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Im Lotfußpunkt gilt $3(-13+3t) - 2(14-2t) + 5(-23+5t) = 8$,
$-182 + 38t = 8, \quad 38t = 190, \quad t = 5$, also ist

$\begin{pmatrix} -13 \\ 14 \\ -23 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ Lotfußpunkt.

e) Abstand = Länge des Lotes: $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -13 \\ 14 \\ -23 \end{pmatrix} \right\| = \left\| 5 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = 5\sqrt{38} \approx 30.82$

Dies erhält man auch mit der Formel mit der Hesseschen Normalform

$$d = \left| \frac{3 \cdot (-13) - 2 \cdot 14 + 5 \cdot (-23) - 8}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2}} \right| = \frac{190}{\sqrt{38}} = \frac{5 \cdot 38}{\sqrt{38}} = 5\sqrt{38} \approx 30.82.$$