Aufgabe 7.56

Stellen Sie die Gleichung der Ebene auf, die die Richtung $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und die Punkte $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$ enthält (Parameterform und parameterfrei)!

Lösung:

Richtungsvektoren in der Ebene sind z.B. $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$.

Parameterform der Ebenengleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$

$x = \quad \lambda + 2\mu \qquad x = \lambda + 2\mu = y + \frac{7}{2} - \frac{3}{2}z + z - 3 = y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \quad x - y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}$

$y = 1 + \lambda + 3\mu \qquad y = 1 + \lambda + 3\frac{z-3}{2} = -\frac{7}{2} + \lambda + \frac{3}{2}z, \quad \lambda = y + \frac{7}{2} - \frac{3}{2}z$

$z = 3 \quad + 2\mu \qquad \mu = \frac{z-3}{2}$

parameterfreie Ebenengleichung: $2x - 2y + z = 1$

oder: $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y-1\\z-3\end{pmatrix} = 2x - 2y + 2 + z - 3 = 0, \quad 2x - 2y + z = 1$$