

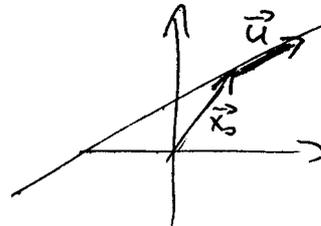
Aufgabe 7.54

Geben Sie die Gleichung der Ebene durch die Punkte $(1, 1, 0)$, $(2, 3, 3)$ und $(1, 2, 4)$ in Parameterform und in parameterfreier Form an!

Lösung:

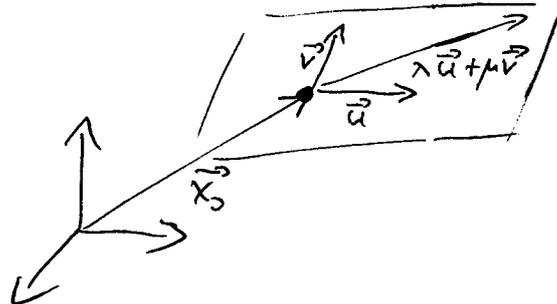
Gerade: Ortsvektor + Parameter * Richtungsvektor

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{u}$$



Ebene: durch 2 Richtungen aufgespannt

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$



Richtungen z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Parameterform der Ebenengleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Um zu einer parameterfreien Form zu kommen, kann man λ und μ eliminieren:

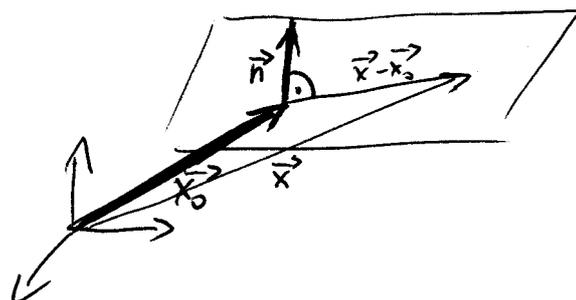
$$\begin{aligned} x = 1 + \lambda & \quad \lambda = x - 1 \\ y = 1 + 2\lambda + \mu & \quad \mu = y - 1 - 2\lambda = y - 1 - 2(x - 1) = -2x + y + 1 \\ z = 3\lambda + 4\mu & \quad z = 3(x - 1) + 4(-2x + y + 1) = -5x + 4y + 1 \end{aligned}$$

parameterfreie Form der Ebenengleichung: $5x - 4y + z = 1$

Man kann die parameterfreie Form auch durch Bestimmung des Stellsvektors (Normalenvektors) ermitteln. Eine Ebene lässt sich auch durch nur 2 Vektoren charakterisieren, den Ortsvektor \vec{x}_0 eines Punktes der Ebene und den Stellsvektor \vec{n} , der auf der Ebene senkrecht steht. Der Stellsvektor bestimmt die Richtung der Ebene, sie lässt sich nur noch parallel verschieben. Mit dem Ortsvektor wird sie fixiert. \vec{n} steht senkrecht auf beliebigen Richtungsvektoren der Ebene und lässt sich deshalb durch das Kreuzprodukt von 2 Richtungsvektoren bestimmen.

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$: steht senkrecht auf Ebene

$\vec{x} - \vec{x}_0$: liegt in Ebene
 ↑ ↑
 bel. Punkt geg. Punkt
 in Ebene in Ebene



parameterfreie Form also $\vec{n}(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$
 (Skalarprodukt)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{parameterfreie Form wie oben: } 5x - 4y + z = 1$$

Die Ebene $ax + by + cz = d$ hat den Stellsvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.