Aufgabe 7.53

Ein Stab ist mit einem Ende im Koordinatenursprung gelagert, ansonsten aber frei beweglich. An das andere Ende des Stabes im Punkt $(1,2,1)$ greife die Kraft $\vec{F}=\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$ an. Berechnen Sie die Richtung der Drehachse, das Drehmoment und seinen Betrag! Vergleichen Sie die Situation mit der von Aufgabe 6.45c)!

Lösung:
Bei Aufgabe 6.45c) ist die von der Kraft $\vec{F}=\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$ längs des Weges $\vec{s}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ geleistete Arbeit gesucht. Diese berechnet sich mithilfe des Skalarprodukts:

Arbeit $=$ Kraft $\cdot$ Weg, dabei ist nur die Kraftkomponente in Wegrichtung wirksam:

$W=\vec{F}\cdot\vec{s}=\|\vec{F}\|\,\|\vec{s}\|\,\cos\alpha, \quad |W|=\|\vec{F}\cdot\vec{s}|=\|\vec{F}\|\,\|\vec{s}\|\,|\cos\alpha|.$

Jetzt ist die zum Radialvektor $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ (radial vom Drehmittelpunkt zum Angriffspunkt) orthogonale Komponente der Kraft wirksam, das ist $M=\|\vec{F}\|\,\|\vec{r}\|\,|\sin\alpha|=\|\vec{F}\times\vec{r}\|$. Das ist der Betrag des Drehmoments. Die Drehachse ist orthogonal zu $\vec{r}$ und $\vec{F}$, hat also die Richtung des Kreuzprodukts.

Man bezeichnet $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ als Drehmoment, die Reihenfolge der Vektoren ist eigentlich willkürlich, aber in der Mechanik so üblich. Ansonsten würde sich die entgegengesetzte Richtung ergeben.

Konkret ist $\vec{M}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&1\\3&4&-2\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\5\\-2\end{pmatrix}$. Das ist das Drehmoment und damit auch die Richtung der Drehachse. Das Drehmoment hat den Betrag $M=\|\vec{M}\|=\sqrt{93}\approx 9{,}64$.