Aufgabe 7.52

Gegeben seien zwei zueinander orthogonale Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus dem Raum $\mathbb{R}^3$ und eine reelle Zahl b. Zeigen Sie, dass $\vec{a}\cdot\vec{x}=b$ die Gleichung einer Ebene und $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{b}$ die Gleichung einer Geraden ist!

Lösung:

Sei $\vec{x}$ ein beliebiger Punkt (genauer der Ortsvektor eines beliebigen Punktes) mit $\vec{a}\cdot\vec{x}=b$,
$\vec{x}_0$ ein fixierter Punkt mit $\vec{a}\cdot\vec{x}_0=b$.

Dann gilt offensichtlich $\vec{a}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)=0$. Das ist die Gleichung der Ebene durch den Punkt $\vec{x}_0$ mit dem Normalenvektor $\vec{a}$.

(Bezüglich der zweiten Gleichung ist zu bemerken, dass sie nicht lösbar wäre, wenn die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht orthogonal wären.)

Sei $\vec{x}$ ein beliebiger Punkt (genauer der Ortsvektor eines beliebigen Punktes) mit $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{b}$,
$\vec{x}_0$ ein fixierter Punkt mit $\vec{a}\times\vec{x}_0=\vec{b}$.

Dann gilt offensichtlich $\vec{a}\times(\vec{x}-\vec{x}_0)=\vec{0}$, folglich sind $\vec{x}-\vec{x}_0$ und $\vec{a}$ parallel, d.h. $\vec{x}-\vec{x}_0=t\vec{a}$, $\vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{a}$. Das ist die Gleichung der Gerade durch den Punkt $\vec{x}_0$ mit der Richtung $\vec{a}$.