Aufgabe 7.50

Sei α der von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ eingeschlossene Winkel.

a) Leiten Sie aus dem Zusammenhang zwischen Kosinus und Skalarprodukt her, wie sich $\sin\alpha$ aus den Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen lässt!

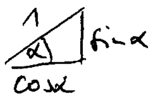
b) Zeigen Sie mithilfe dieser Darstellung, dass das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt $\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right|$ hat!

c) Wie lässt sich dieser Sachverhalt mit Hilfe des Kreuzproduktes darstellen?

d) Welche entsprechende Aussage gilt für das Spatprodukt?

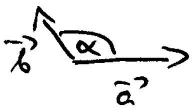
Lösung:

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$



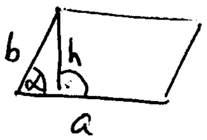
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (Satz des Pythagoras)

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = \frac{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}$$
$$= \frac{a_1^2b_1^2+a_2^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_2^2-a_1^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2-a_2^2b_2^2}{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}$$
$$= \frac{a_1^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_1^2}{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)} = \frac{(a_1b_2-a_2b_1)^2}{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}$$



Für $0 \le \alpha \le 180°$ ergibt sich

$$\sin\alpha = \frac{|a_1b_2-a_2b_1|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2}} = \frac{1}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right|.$$

b) 

$h = b\sin\alpha$

Fläche des Parallelogramms $F = ah = ab\sin\alpha = \left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right|$

c) (vgl. Aufgabe 7.51:)

Kreuzprodukt ist im dreidimensionalen Raum definiert, $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$ ist die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Wählen $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann gilt $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}$.

Also gilt für den Flächeninhalt $F = \|\vec{a}\times\vec{b}\| = |a_1b_2 - b_1a_2| = \left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right|$.

d) (vgl. Aufgabe 7.115:)

$\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right|$: Fläche des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

$\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|$: Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds (Spats)