Aufgabe 7.47

Gegeben sei das Dreieck mit den Eckpunkten $A(1,1,1)$, $B(2,-1,4)$ und $C(4,2,-4)$.

a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks!
b) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks!
c) Berechnen Sie den Winkel beim Punkt A !
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mithilfe des Kreuzproduktes!

Lösung:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \approx 3.74, \quad \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{77} \approx 8.77, \quad \left\|\overrightarrow{CA}\right\| = \sqrt{35} \approx 5.92$$

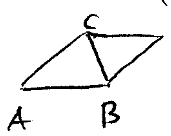
b) $\vec{x}_P$ sei der Ortsvektor des Punktes P. Dann ergibt sich der Ortsvektor des Schwerpunktes zu

$$\frac{\vec{x}_A + \vec{x}_B + \vec{x}_C}{3} = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

c) $$\cos\alpha = \cos\sphericalangle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}{\sqrt{14}\sqrt{35}} = \frac{-14}{\sqrt{14}\sqrt{35}} = -\sqrt{\frac{14}{35}} = -\sqrt{\frac{2}{5}},$$

$$\alpha = \arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \approx 129.23^\circ$$

d) Fläche des Dreiecks $= \dfrac{1}{2}$ Fläche des Parallelogramms



$$F = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-5) - 1\cdot 3 \\ -(1\cdot(-5) - 3\cdot 3) \\ 1\cdot 1 - 3\cdot(-2) \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{7}{2}\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{7}{2}\sqrt{6} \approx 8.57$$