Aufgabe 7.44

Berechnen Sie die Seitenlängen, die Winkel und den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(-2,1)$, $B(4,4)$, $C(2,-7)$!

Lösung:

$$c = \|\vec{c}\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5},$$

$$a = \|\vec{a}\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-2\\-11\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{125} = 5\sqrt{5},$$

$$b = \|\vec{b}\| = \left\|\overrightarrow{CA}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = \|\vec{b}\|\,\|\vec{c}\|\,\cos\alpha, \quad \vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} = -4\cdot 6 + 8\cdot 3 = 0$$

(Skalarprodukt: komponentenweise multiplizieren und addieren)

Skalarprodukt $= 0 \iff$ Vektoren orthogonal

$$\cos\alpha = \cos\sphericalangle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}\right\|} = 0, \quad \alpha = 90^\circ$$

$$\cos\beta = \cos\sphericalangle\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right) = \frac{\begin{pmatrix}-2\\-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-2\\-11\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}\right\|} = \frac{45}{5\sqrt{5}3\sqrt{5}} = \frac{3}{5}, \quad \beta = \arccos\frac{3}{5} \approx 53.13^\circ$$

$$\cos\gamma = \cos\sphericalangle\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = \frac{\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\11\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}2\\11\end{pmatrix}\right\|} = \frac{80}{4\sqrt{5}5\sqrt{5}} = \frac{4}{5}, \quad \gamma = \arccos\frac{4}{5} \approx 36.87^\circ$$

$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, rechtwinkliges Dreieck, siehe oben: $a^2 = b^2 + c^2$ offensichtlich

Flächeninhalt $\dfrac{bc}{2} = \dfrac{4\sqrt{5}3\sqrt{5}}{2} = 30$