

Aufgabe 7.42

Sei $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Beweisen Sie: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b})$!

Lösung:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 |\sin \angle(\vec{a}, \vec{b})|^2,$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 (\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}))^2,$$

$$\text{also } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 = (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b})$$