Aufgabe 7.41

Im Raum $\mathbb{R}^3$ mit üblichem Skalarprodukt seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ gegeben!

a) Berechnen Sie $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$!
b) Notieren Sie für die konkreten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Cauchy-Schwarzsche und die Dreiecksungleichung!
c) Ermitteln Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$!
d) Ermitteln Sie die Fläche des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms!

Lösung:

a) $\|\vec{a}\| = \sqrt{14} \approx 3{,}74, \quad \|\vec{b}\| = \sqrt{35} \approx 5{,}92$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 3 - 2\cdot 1 - 3\cdot 5 = -14$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}$$

b) Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = 14 \ \leq\ \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| = \sqrt{490} = 7\sqrt{10} \approx 22{,}14$

Dreiecksungleichung: $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{21} \approx 4{,}58 \ \leq\ \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| = \sqrt{14} + \sqrt{35} \approx 9{,}66$

c) $$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \arccos \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right\|} = \arccos \frac{-14}{\sqrt{14}\sqrt{35}} = \arccos\left(-\sqrt{\frac{14}{35}}\right) = \arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \approx 129{,}23^\circ$$

d) $$F = \left\|\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}\right\| = 7\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = 7\sqrt{6} \approx 17{,}15$$