Aufgabe 7.32

Gegeben sei das Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(-1,5)$. Ermitteln Sie rechnerisch

a) die Größe des Innenwinkels beim Punkt A,
b) die Gleichung der Geraden, die auf der Mitte der Seite AB senkrecht steht,
c) den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks,
d) den Radius des Umkreises des Dreiecks!

Lösung:

a) $\alpha = \arccos \dfrac{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\right\|} = \arccos \dfrac{6}{\sqrt{5\cdot 20}} = \arccos 0{,}6 \approx 53{,}13^\circ$

b) $AB: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ 0 \le t \le 1$

Der Mittelpunkt von AB ergibt sich für $t = \dfrac{1}{2}$ zu $\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$, auf $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ senkrecht steht der Vektor $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. Also hat die Mittelsenkrechte die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix}3/2\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

c) Mittelsenkrechte von AC ist $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Damit ergibt sich der Schnittpunkt durch Lösung des Gleichungssystems $2s = 3/2 + 2t,\ 3 + s = 2 - t$: $s = 3/4 + t,\ 3 + 3/4 + t = 2 - t,\ t = -7/8,\ s = -1/8$. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist also $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{23}{8}\right)$.

d) Da sich die Mittelsenkrechten im Mittelpunkt des Umkreises schneiden, beträgt sein Radius $\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2/8\\23/8\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}10/8\\-15/8\end{pmatrix}\right\| = \dfrac{\sqrt{325}}{8} = \dfrac{5}{8}\sqrt{13} \approx 2{,}25.$