

Aufgabe 7.27

In der x - y -Ebene werde die Gerade $4x - 5y = 20$ betrachtet.

- Geben Sie die Gleichung der Gerade in Parameterform an!
- Geben Sie die zur Geradenrichtung orthogonale Richtung an!
- Geben Sie die Geradengleichung der Lots vom Punkt $P(2, -2)$ auf die Gerade an, bestimmen Sie den Lotfußpunkt und den Abstand des Punktes P von der Geraden!

Lösung:

- a) Auf der Gerade liegen die Punkte $(5, 0)$ und $(0, -4)$, folglich erhält man als Geradengleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

oder:

$$y = \frac{4x - 20}{5} = \frac{4}{5}x - 4, \text{ also } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- b) Wegen $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$ ist die Richtung $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ orthogonal zur Geradenrichtung $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- c) Mit der unter b) notierten Richtung lautet die Geradengleichung des Lots $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Der Lotfußpunkt ist ihr Schnittpunkt mit der gegebenen Gerade. Einsetzen ergibt:

$$4(2 - 4t) - 5(-2 + 5t) = 20, \quad 8 - 16t + 10 - 25t = 20, \quad 41t = -2, \quad t = -\frac{2}{41}.$$

$$\text{Lotfußpunkt ist also } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{2}{41} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90/41 \\ -92/41 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Abstand ist die Länge des Lotes: } \left| -\frac{2}{41} \right| \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{41} \sqrt{41} = \frac{2}{\sqrt{41}} \approx 0.312.$$