

Aufgabe 7.17

Ermitteln Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$!

Lösung:

Wenn es einen Schnittpunkt gibt, so gilt in diesem $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} 4 + t = & 3u & | \cdot (-2) \\ -1 - 2t = & u & | + \\ 8 + 2t = & 6u & | + \\ 7 = & 7u & \quad u = 1, t = 3u - 4 = -1 \end{array}$$

$4 + 3t = 6 - 5u$ ist für $t = -1$, $u = 1$ erfüllt.

Da das Gleichungssystem lösbar ist, gibt es einen Schnittpunkt, dieser ist

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schnittwinkel ist der auch in Aufgabe 7.41 ermittelte Winkel von

$$\arccos \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\|} = \arccos \frac{-14}{\sqrt{14}\sqrt{35}} = \arccos \left(-\sqrt{\frac{14}{35}} \right) = \arccos \left(-\sqrt{\frac{2}{5}} \right) \approx 129,23^\circ.$$

Auch die Angabe des Supplementwinkels von ca. $50,77^\circ$ ist richtig. Er ergibt sich, wenn man bei einer der Geraden den Richtungsvektor in die entgegengesetzte Richtung verwendet.