

Aufgabe 7.11

Seien M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 und M_6 die Mittelpunkte der Seiten eines Sechsecks. Zeigen Sie, dass die Schwerpunkte der Dreiecke $M_1M_3M_5$ und $M_2M_4M_6$ übereinstimmen!

Lösung:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ und \vec{f} seien die Ortsvektoren der Eckpunkte des Sechsecks. Dann gilt für die Ortsvektoren der Seitenmittelpunkte

$$\vec{m}_1 = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), \vec{m}_2 = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}), \vec{m}_3 = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}), \vec{m}_4 = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{e}), \vec{m}_5 = \frac{1}{2}(\vec{e} + \vec{f}), \vec{m}_6 = \frac{1}{2}(\vec{f} + \vec{a}).$$

Hieraus folgt für die Ortsvektoren der Schwerpunkte der Dreiecke $M_1M_3M_5$ und $M_2M_4M_6$

$$\frac{\vec{m}_1 + \vec{m}_3 + \vec{m}_5}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}}{6} = \frac{\vec{m}_2 + \vec{m}_4 + \vec{m}_6}{3}.$$

Die Schwerpunkte haben die gleichen Ortsvektoren und stimmen somit überein.