Aufgabe 7.10

Gegeben sei ein Dreieck $A_1B_1C_1$. Die Mittelpunkte der Seiten A_1B_1, B_1C_1 und C_1A_1 seien C_2, A_2 und B_2. Zeigen Sie, dass sich die Seitenhalbierenden der Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ im gleichen Punkt schneiden!

Lösung:

Es gilt $\vec{a}_2 = \dfrac{\vec{b}_1 + \vec{c}_1}{2}$, $\vec{b}_2 = \dfrac{\vec{c}_1 + \vec{a}_1}{2}$, $\vec{c}_2 = \dfrac{\vec{a}_1 + \vec{b}_1}{2}$.

Die Seitenhalbierenden schneiden sich in den Schwerpunkten der Dreiecke. Hieraus folgt für die Ortsvektoren der Schwerpunkte der Dreiecke $A_2B_2C_2$ und $A_1B_1C_1$

$$\frac{\vec{a}_2 + \vec{b}_2 + \vec{c}_2}{3} = \frac{\vec{b}_1 + \vec{c}_1 + \vec{c}_1 + \vec{a}_1 + \vec{a}_1 + \vec{b}_1}{6} = \frac{\vec{a}_1 + \vec{b}_1 + \vec{c}_1}{3}.$$

Die Schwerpunkte haben die gleichen Ortsvektoren und stimmen somit überein.

(s. auch Aufgabe 9.26)