Aufgabe 7.7

Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die Ortsvektoren der Eckpunkte eines Dreiecks und a, b und c die Seitenlängen der den Ecken gegenüberliegenden Seiten. Zeigen Sie, dass $\vec{x} = \dfrac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$ der Ortsvektor des Schnittpunkts der Winkelhalbierenden, d.h. der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ist!

Lösung:

$$\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}-\vec{a}=\frac{-(b+c)\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}=\frac{b(\vec{b}-\vec{a})}{a+b+c}+\frac{c(\vec{c}-\vec{a})}{a+b+c}$$

Die Vektoren $\dfrac{b(\vec{b}-\vec{a})}{a+b+c}$ und $\dfrac{c(\vec{c}-\vec{a})}{a+b+c}$ zeigen in die Richtungen der vom Punkt A ausgehenden Seiten, wegen $\|\vec{b}-\vec{a}\|=c$ und $\|\vec{c}-\vec{a}\|=b$ gilt außerdem $\left\|\dfrac{b(\vec{b}-\vec{a})}{a+b+c}\right\|=\dfrac{bc}{a+b+c}=\left\|\dfrac{c(\vec{c}-\vec{a})}{a+b+c}\right\|$, so dass die beiden Vektoren gleichlang sind. Folglich ist ist ihr Mittelwert dir Richtung der vom Punkt A ausgehenden Winkelhalbierenden.

Aufgrund der eingangs gezeigten Beziehung liegt der Punkt mit dem Ortsvektor $\dfrac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$ also auf der Winkelhalbierenden durch den Punkt A, aus Symmetriegründen auch auf den beiden anderen Winkelhalbierenden. Da der Punkt auf allen drei Winkelhalbierenden liegt, handelt es sich um den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.

Jede Winkelhalbierende ist von den jeweiligen Seiten gleich weit entfert, so dass der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ist.