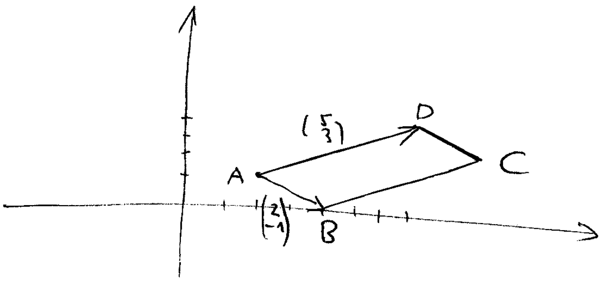
Aufgabe 7.3

Der Ortsvektor des Eckpunktes A eines Parallelogramms $ABCD$ sei $\vec{x}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, die von A ausgehenden Seiten haben die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Ortsvektoren der Eckpunkte B, C und D !
b) Berechnen Sie die Richtungsvektoren der Diagonalen und ihre Längen!
c) Berechnen Sie die Ortsvektoren der Mittelpunkte der Diagonalen!

Lösung:



a)
$$\begin{aligned}
\vec{x}_B &= \vec{x}_A + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{x}_D &= \vec{x}_A + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\vec{x}_C &= \vec{x}_B + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \vec{x}_D + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b)
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{7^2+2^2} = \sqrt{53} \approx 7{,}28$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \left\|\overrightarrow{BD}\right\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

c)
$$\left.\begin{aligned}
&\text{Mittelpunkt von } \overrightarrow{AC}: \quad \vec{x}_A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&\text{Mittelpunkt von } \overrightarrow{BD}: \quad \vec{x}_B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \quad \text{Die Diagonalen halbieren einander.}$$