Aufgabe 6.225

Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

und untersuchen Sie die Matrizen auf Orthogonalität!

Lösung:

a) Entwicklung nach 3. Zeile: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1+1) = 2$

Für orthogonale Matrizen gilt $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \boldsymbol{E}$ und daher $\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\right) = \det(\boldsymbol{E}) = 1$ sowie wegen $\det\left(\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\right) = \det(\boldsymbol{A})$ schließlich $(\det(\boldsymbol{A}))^2 = 1$, $\det(\boldsymbol{A}) = \pm 1$. Also kann die Matrix nicht orthogonal sein.

b) Entwicklung nach 3. Zeile: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (1+1) = 1$

Die bei a) angegebene **notwendige** Bedingung für die Orthogonaliät ist erfüllt. Allerdings ist die Bedingung nicht hinreichend, so dass die Orthogonalität noch getestet werden muss:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{E}: \text{ Matrix nicht orthogonal.}$$

c) $\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) = 1$

Die bei a) angegebene notwendige Bedingung für die Orthogonaliät ist erfüllt. Test der Orthogonalität:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}: \text{ Matrix orthogonal.}$$