Aufgabe 6.223

Kann man Parameter c und d finden, für die die Matrix $c\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & d\end{pmatrix}$ orthogonal wird?

Lösung:

orthogonale Matrix: $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}=\boldsymbol{A}^{-1}$, d.h. auch $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}=\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$

Einführende Frage: Woran ist zu denken, wenn im Zusammenhang mit Orthogonalität die Zahlen 3 und 4 verwendet werden? (Pythagoras, 5)

$\boldsymbol{A}^\mathsf{T}=c\begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & d\end{pmatrix}$, $\det(\boldsymbol{A})=c^2(3d+16)$. Mit dem Ergebnis von Aufgabe 6.175 folgt
$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{c^2(3d+16)}c\begin{pmatrix}d & 4\\ -4 & 3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{c(3d+16)}\begin{pmatrix}d & 4\\ -4 & 3\end{pmatrix}$.

Damit $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}=\boldsymbol{A}^{-1}$ gilt, muss also $d=3$ und $\dfrac{1}{c(3d+16)}=\dfrac{1}{25c}=c$, $c^2=\dfrac{1}{25}$, $c=\pm\dfrac{1}{5}$ sein.

Orthogonal sind also $\pm\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, d.h. $\begin{pmatrix}3/5 & -4/5\\ 4/5 & 3/5\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-3/5 & 4/5\\ -4/5 & -3/5\end{pmatrix}$.

Multipliziert man $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$, so sieht man, dass das auf $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=1 \;\widehat{=}\; 3^2+4^2=5^2$, also der Verwendung der pythagoreischen Zahlen 3, 4 und 5 beruht.