Aufgabe 6.222

In dem Gleichungssystem $x_1 = y_1,\ x_3 = y_2,\ x_2 = y_3,\ ax_3 + bx_4 = y_4$ seien y_i $(i=1,2,3,4)$ gegeben und x_i $(i=1,2,3,4)$ gesucht.

a) Notieren Sie das Gleichungssystem in Matrixschreibweise, bestimmen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Inverse der Koeffizientenmatrix und notieren Sie mit Hilfe dieser Inversen die Lösung des Gleichungssystems!

b) Für welche Werte der Parameter a und b existiert die Inverse nicht? Geben Sie die ggf. dennoch existierende Lösung des Gleichungssystems an!

Lösung:

a)
$$\begin{array}{llll} x_1 & & & = y_1 \\ & & x_3 & = y_2 \\ & x_2 & & = y_3 \\ & & ax_3 + bx_4 & = y_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & -a & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{a}{b} & 0 & \frac{1}{b} \end{array}$$
falls $b \neq 0$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{b} & 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}, \text{ falls } b \neq 0$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{b} & 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_2 \\ -\frac{a}{b}y_2 + \frac{1}{b}y_4 \end{pmatrix}$$

Für $b \neq 0$ ergibt sich also die Lösung
$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_3,\ x_3 = y_2,\ x_4 = \frac{-ay_2 + y_4}{b}.$$

b) Die Inverse existiert nicht, falls $b=0$ gilt. Ist dies der Fall, so lautet das Gleichungssystem
$x_1 = y_1,\ x_3 = y_2,\ x_2 = y_3,\ ax_3 = y_4.$
Einsetzen der 2. in die 4. Gleichung ergibt $ax_3 = ay_2 = y_4$ sein. Für $b=0$ ist das Gleichungssystem also nur dann lösbar, wenn $ay_2 = y_4$ gilt.

Ist dies der Fall, so kann x_4 beliebig gewählt werden, weil es überhaupt nicht im Gleichungssystem vorkommt. Die allgemeine Lösung lautet dann also $x_1 = y_1,\ x_2 = y_3,\ x_3 = y_2,\ x_4 = t,$ t beliebig.