Aufgabe 6.219

Gegeben sei die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 7 & a & b \end{pmatrix}$.

a) Welche Schlussfolgerungen lassen sich aus dem Ergebnis von Aufgabe 6.87 hinsichtlich der Invertierbarkeit der Matrix $\boldsymbol{A}$ ziehen?

b) Berechnen Sie im Falle ihrer Existenz mit dem Gaußschen Algorithmus die zu $\boldsymbol{A}$ inverse Matrix!

c) Lösen Sie mithilfe der bei b) ermittelten inversen Matrix das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 9 \end{aligned} \quad !$$

Lösung:

a) Eine vierreihige quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihr Rang gleich 4 ist. Da es bei der Matrix $\boldsymbol{A}$ um die ersten 4 Spalten der Matrix aus Aufgabe 6.87 handelt, ist der Rang im Falle $a=b$ gleich 3, sonst 4. Also ist die Matrix $\boldsymbol{A}$ genau dann invertierbar, wenn $a \neq b$ ist.

b) Im Falle $a \neq b$ ergibt sich folgende Rechnung:

$$\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 7 & a & b & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 3 & a-4 & b-4 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & a-7 & b-7 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b-a & 1 & a-10 & 7-a & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{b-a} & \frac{a-10}{b-a} & \frac{7-a}{b-a} & \frac{1}{b-a} \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{b-a} & \frac{10-b}{b-a} & \frac{b-7}{b-a} & \frac{-1}{b-a} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{b-a} & \frac{a-10}{b-a} & \frac{7-a}{b-a} & \frac{1}{b-a}
\end{array}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ \frac{-1}{b-a} & \frac{10-b}{b-a} & \frac{b-7}{b-a} & \frac{-1}{b-a} \\ \frac{1}{b-a} & \frac{a-10}{b-a} & \frac{7-a}{b-a} & \frac{1}{b-a} \end{pmatrix}$$

c) Vertauscht man x_1 und x_2, so kann man das Gleichungssystem in folgender Form notieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Bei der Koeffizientenmatrix handelt es sich um die Matrix $\boldsymbol{A}$ mit $a=5$ und $b=6$. Folglich gilt

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung des Gleichungssystems ist somit $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=-1,\ x_4=2$.