Aufgabe 6.218

Gegeben seien die Matrizen $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\2&3&a\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Determinante und den Rang der Matrix $\boldsymbol{A}$ in Abhängigkeit vom Parameter a !
b) Für welche a existiert die Inverse zur Matrix $\boldsymbol{A}$? Berechnen Sie diese im Falle ihrer Existenz!
c) Lösen Sie im Falle $a=3$ das Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\vec{x}=(5\ \ 6\ \ 5)^{\mathsf{T}}$!
d) Berechnen Sie die Matrix $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}$ und geben Sie ihren Rang in Abhängigkeit von a an!

Lösung:

a) $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&4\\2&3&a\end{vmatrix}=a+16-6-12=a-2$

Für $a\neq 2$ ist die Determinante ungleich 0 und der Rang damit 3, für $a=2$ ist er kleiner als 3. Da die ersten beiden Zeilen offensichtlich linear unabhängig sind, ist der Rang mindestens 2, also im Falle $a=2$ gleich 2.

oder

$$\begin{array}{ccc}1&2&3\\0&1&4\\2&3&a\\\hline 1&2&3\\0&1&4\\0&-1&a-6\\\hline 1&2&3\\0&1&3\\0&0&a-2\\\hline\end{array}$$

Rang 2 für $a=2$
Rang 3 für $a\neq 2$

b) Die inverse Matrix existiert genau dann, wenn $a\neq 2$ ist.

$$\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&4&0&1&0\\2&3&a&0&0&1\\\hline 1&2&3&1&0&0\\0&1&4&0&1&0\\0&-1&a-6&-2&0&1\\\hline 1&2&3&1&0&0\\0&1&4&0&1&0\\0&0&a-2&-2&1&1\\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&4&0&1&0\\0&0&1&\frac{-2}{a-2}&\frac{1}{a-2}&\frac{1}{a-2}\\\hline 1&2&0&\frac{a+4}{a-2}&\frac{-3}{a-2}&\frac{-3}{a-2}\\0&1&0&\frac{8}{a-2}&\frac{a-6}{a-2}&\frac{-4}{a-2}\\0&0&1&\frac{-2}{a-2}&\frac{1}{a-2}&\frac{1}{a-2}\\\hline 1&0&0&\frac{a-12}{a-2}&\frac{-2a+9}{a-2}&\frac{5}{a-2}\\0&1&0&\frac{8}{a-2}&\frac{a-6}{a-2}&\frac{-4}{a-2}\\0&0&1&\frac{-2}{a-2}&\frac{1}{a-2}&\frac{1}{a-2}\end{array}$$

Für $a\neq 2$ gilt also $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{a-2}\begin{pmatrix}a-12&-2a+9&5\\8&a-6&-4\\-2&1&1\end{pmatrix}$.

c) Unter Verwendung des Ergebnisses von b) ergibt sich für $a=3$ die Lösung

$$\vec{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}5\\6\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&3&5\\8&-3&-4\\-2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\6\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}.$$

d) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\2&3&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&2\\0&1\\2a&3\end{pmatrix}$, also $\operatorname{Rang}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}})=\begin{cases}1, & a=0\\2, & a\neq 0\end{cases}$.