Aufgabe 6.217

Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & a \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\det(\boldsymbol{A})$ und $\boldsymbol{A}^{-1}$ in Abhängigkeit vom Parameter a !
b) Welcher Zusammenhang besteht zur Lösung von Aufgabe 6.152?
c) Lösen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von a) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 4 \\ -3x + 4y + z &= -3 \\ -4x + 7y + 12z &= 10 \end{aligned} \quad !$$

Lösung:

a) $\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & a \end{vmatrix} = 4a + 4 - 42 + 32 - 3a - 7 = a - 13$

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & a & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & a+8 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-13 & -5 & -3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{a-13} & \frac{-3}{a-13} & \frac{1}{a-13} \\ \hline 1 & -1 & 0 & \frac{a-3}{a-13} & \frac{6}{a-13} & \frac{-2}{a-13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3a-4}{a-13} & \frac{a+8}{a-13} & \frac{-7}{a-13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{a-13} & \frac{-3}{a-13} & \frac{1}{a-13} \\ \hline 1 & 0 & 0 & \frac{4a-7}{a-13} & \frac{a+14}{a-13} & \frac{-9}{a-13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3a-4}{a-13} & \frac{a+8}{a-13} & \frac{-7}{a-13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{a-13} & \frac{-3}{a-13} & \frac{1}{a-13} \end{array}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{a-13} \begin{pmatrix} 4a-7 & a+14 & -9 \\ 3a-4 & a+8 & -7 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Im Falle $a = 13$ ist die Matrix $\boldsymbol{A}$ nicht invertierbar.

b) Bis auf einen Zeilentausch handelt es sich bei $\boldsymbol{A}$ um die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems aus Aufgabe 6.152. Durch den Zeilentausch ändern sich der Rang und die Lösbarkeitseigenschaften des Gleichungssystems nicht. Das Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich 0 ist, ihr Rang gleich der Zeilen- und Spaltenzahl ist, sie invertierbar ist. Alle diese Eigenschaften sind genau dann erfüllt, wenn $a \neq 13$ ist.

c) Mit $a = 12$ ergibt sich aus dem Ergebnis von a)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 41 & 26 & -9 \\ 32 & 20 & -7 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also ist $x = 4$, $y = 2$ und $z = 1$.