Aufgabe 6.216

Sei $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&3\\3&1&a\end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\det(\boldsymbol{A})$ und $\boldsymbol{A}^{-1}$ in Abhängigkeit vom Parameter a !

b) Lösen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von a) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x+z&=2\\ 2x+y+3z&=7\\ 3x+y+5z&=12 \end{aligned} \quad !$$

Lösung:

a) $\det(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&3\\3&1&a\end{vmatrix}=a+2-3-3=a-4$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1&0&1&1&0&0\\
2&1&3&0&1&0\\
3&1&a&0&0&1\\
\hline
1&0&1&1&0&0\\
0&1&1&-2&1&0\\
0&1&a-3&-3&0&1\\
\hline
1&0&1&1&0&0\\
0&1&1&-2&1&0\\
0&0&a-4&-1&-1&1\\
\hline
1&0&1&1&0&0\\
0&1&1&-2&1&0\\
0&0&1&\frac{-1}{a-4}&\frac{-1}{a-4}&\frac{1}{a-4}\\
\hline
1&0&0&\frac{a-3}{a-4}&\frac{1}{a-4}&\frac{-1}{a-4}\\
0&1&0&\frac{-2a+9}{a-4}&\frac{a-3}{a-4}&\frac{-1}{a-4}\\
0&0&1&\frac{-1}{a-4}&\frac{-1}{a-4}&\frac{1}{a-4}
\end{array}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{a-4}\begin{pmatrix}a-3&1&-1\\9-2a&a-3&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

Im Falle $a=4$ ist die Matrix $\boldsymbol{A}$ nicht invertierbar.

b) Mit $a=5$ ergibt sich aus dem Ergebnis von a)

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\7\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix},$$

also ist $x=-1$, $y=0$ und $z=3$.