Aufgabe 6.214

Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & a \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\det(\boldsymbol{A})$ und $\boldsymbol{A}^{-1}$ in Abhängigkeit vom Parameter a !

b) Lösen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von a) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x \qquad + 3z &= 3 \\ 2x + \ y + 8z &= 2 \\ 2x - 3y + 6z &= 0 \end{aligned} \quad !$$

Lösung:

a) $\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix} = a - 18 - 6 + 24 = a$

$$\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\
2 & -3 & a & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\
0 & -3 & a-6 & -2 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & a & -8 & 3 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{8}{a} & \frac{3}{a} & \frac{1}{a} \\ \hline
1 & 0 & 0 & \frac{a+24}{a} & \frac{-9}{a} & \frac{-3}{a} \\
0 & 1 & 0 & \frac{-2a+16}{a} & \frac{a-6}{a} & \frac{-2}{a} \\
0 & 0 & 1 & \frac{-8}{a} & \frac{3}{a} & \frac{1}{a}
\end{array}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} a+24 & -9 & -3 \\ -2a+16 & a-6 & -2 \\ -8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Im Falle $a=0$ ist die Matrix $\boldsymbol{A}$ nicht invertierbar.

b) Mit $a=6$ ergibt sich aus dem Ergebnis von a)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 30 & -9 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -8 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 72 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

also ist $x=12$, $y=2$ und $z=-3$.