Aufgabe 6.213

Berechnen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 2 & a \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 18 \end{pmatrix}$ und lösen Sie mit ihrer Hilfe das lineare Gleichungssystem $\begin{aligned} 5x+2y+\ \ z &= 13 \\ 4x+3y+\ 7z &= 13 \\ x+4y+18z &= -13 \end{aligned}$!

Welcher Zusammenhang besteht zur Aufgabe 6.174?

Lösung:

Um das Rechnen mit Brüchen und Parametern so lange wie möglich zu vermeiden, sollten in einem ersten Schritt die 1. und 3. Zeile getauscht werden. Dann steht die 1 links oben und der Parameter a in der letzten Zeile. Die Zeilenvertauschung ist immer ohne weiteres möglich, während eine Spaltenvertauschung zu einer Änderung der Reihenfolge der Zeilen in der inversen Matrix führen würde.

$$
\begin{array}{rrr|rrrl}
5 & 2 & a & 1 & 0 & 0 & \mid \mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III} \\
4 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 & \\
1 & 4 & 18 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 4 & 18 & 0 & 0 & 1 & \\
4 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 & \mid \mathrm{II} - 4\,\mathrm{I} \\
5 & 2 & a & 1 & 0 & 0 & \mid \mathrm{III} - 5\,\mathrm{I} \\
\hline
1 & 4 & 18 & 0 & 0 & 1 & \\
\mathbf{0} & -13 & -65 & 0 & 1 & -4 & \mid \mathrm{II} : (-13) \\
\mathbf{0} & -18 & a-90 & 1 & 0 & -5 & \\
\hline
1 & 4 & 18 & 0 & 0 & 1 & \\
0 & \mathbf{1} & 5 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \\
0 & -18 & a-90 & 1 & 0 & -5 & \mid \mathrm{III} + 18\,\mathrm{II} \\
\hline
1 & 4 & 18 & 0 & 0 & 1 & \\
0 & 1 & 5 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \\
0 & \mathbf{0} & a & 1 & -\frac{18}{13} & \frac{7}{13} & \mid \mathrm{III} : a \\
\hline
1 & 4 & 18 & 0 & 0 & 1 & \mid \mathrm{I} - 18\,\mathrm{III} \\
0 & 1 & 5 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \mid \mathrm{II} - 5\,\mathrm{III} \\
0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{a} & -\frac{18}{13a} & \frac{7}{13a} & \\
\hline
1 & 4 & \mathbf{0} & -\frac{18}{a} & \frac{324}{a} & \frac{13a-126}{13a} & \mid \mathrm{I} - 4\,\mathrm{II} \\
0 & 1 & \mathbf{0} & -\frac{5}{a} & \frac{90-a}{13a} & \frac{4a-35}{13a} & \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} & -\frac{18}{13a} & \frac{7}{13a} & \\
\hline
1 & \mathbf{0} & 0 & \frac{2}{a} & \frac{4a-36}{a} & \frac{14-3a}{13a} & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{5}{a} & \frac{90-a}{13a} & \frac{4a-35}{13a} & \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} & -\frac{18}{13a} & \frac{7}{13a} &
\end{array}
$$

Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich 0 ist. Die Determinante der Matrix ist nach Aufgabe 6.174e) gleich $13a$, sie ist also genau dann ungleich 0, wenn $a \neq 0$ ist.

Für $a=0$ existiert deshalb die inverse Matrix nicht, ansonsten gilt

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & a \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 18 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{13a} \begin{pmatrix} 26 & 4a-36 & 14-3a \\ -65 & 90-a & 4a-35 \\ 13 & -18 & 7 \end{pmatrix}.$$

Für das Gleichungssystem ist $a=1$ zu wählen. Lösung von $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 18 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}$ ist

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 18 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 26 & -32 & 11 \\ -65 & 89 & -31 \\ 13 & -18 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 26 & -32 & 11 \\ -65 & 89 & -31 \\ 13 & -18 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 55 \\ -12 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } x=-17,\ y=55,\ z=-12.$$