Aufgabe 6.212

Berechnen Sie $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&4\\2&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&4&-2\\1&-6&7\\1&0&2\end{pmatrix}^{\top}$!

Lösung:

Inversion von $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&4\\2&1&1\end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{rrr|rrr}1&1&1&1&0&0\\2&2&4&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\\\hline 1&1&1&1&0&0\\0&0&2&-2&1&0\\0&-1&-1&-2&0&1\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{rrr|rrr}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&2&0&-1\\0&0&1&-1&1/2&0\\\hline 1&1&0&2&-1/2&0\\0&1&0&3&-1/2&-1\\0&0&1&-1&1/2&0\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{rrr|rrr}1&0&0&-1&0&1\\0&1&0&3&-1/2&-1\\0&0&1&-1&1/2&0\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&-\frac{1}{2}&-1\\-1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\4&-6&0\\-2&7&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&6&1\\6&-1&1\\0&-4&-1\end{pmatrix}$$

oder:

Die gesuchte Matrix $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}$ kann durch Lösung des Gleichungssystems $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}^{\top}$ ermittelt werden:

$$\begin{array}{rrr|rrr}1&1&1&2&1&1\\2&2&4&4&-6&0\\2&1&1&-2&7&2\\\hline 1&1&1&2&1&1\\0&0&2&0&-8&-2\\0&-1&-1&-6&5&0\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{rrr|rrr}1&1&1&2&1&1\\0&1&1&6&-5&0\\0&0&1&0&-4&-1\\\hline 1&1&0&2&5&2\\0&1&0&6&-1&1\\0&0&1&0&-4&-1\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{rrr|rrr}1&0&0&-4&6&1\\0&1&0&6&-1&1\\0&0&1&0&-4&-1\\\hline\end{array}$$