

Aufgabe 6.211

a) Invertieren Sie die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 12 & 5 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus!

b) Lösen Sie mit Hilfe der inversen Matrix die Gleichungssysteme

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 = 8 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 = 11 \end{array} !$$

Lösung:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 12 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{25} & -\frac{3}{25} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{25} & \frac{3}{25} & 0 & -\frac{1}{5} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -10 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -11 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{25} & \frac{19}{25} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{25} & -\frac{11}{25} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{25} & -\frac{3}{25} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{25} & \frac{3}{25} & 0 & -\frac{1}{5} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -\frac{11}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 1 \end{array} \end{array}$$

Es ist also $A^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -2 & 19 & 15 & -15 \\ -7 & -11 & 0 & 10 \\ -1 & -3 & -5 & 5 \\ 11 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

b) $A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. Um die ermittelte inverse Matrix nutzen zu können, müssen beim zweiten Gleichungssystem die 2. und die 3. Zeile vertauscht werden. Durch den Zeilentausch ändert sich die Lösung des Gleichungssystems nicht.

Die Lösungen sind $A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $A^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für das zweite Gleichungssystem wird das Ergebnis durch direkte Anwendung des Gaußschen Algorithmus auf das Gleichungssystem in Aufgabe 6.120 ermittelt.