Aufgabe 6.209

Berechnen Sie (sofern existent) die Inversen der Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -10 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ und b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -10 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$!

Welcher Zusammenhang besteht zum Ergebnis von Aufgabe 6.148?

Lösung:

$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{c} \implies \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\vec{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\vec{c} \implies \vec{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\vec{c}$

$\boldsymbol{A}$ invertierbar $\iff \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) = n \iff$ GS $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{c}$ eindeutig lösbar für jede rechte Seite

Folglich ist nur die Matrix a) invertierbar (Aufgabe 6.148 mit $a=2\neq 1$), die Matrix b) ist Koeffientenmatrix des Gleichungssystems aus Aufgabe 6.148 mit $a=1$ (unlösbar bzw. mehrdeutig lösbar).

1	−2	3	1	0	0
4	3	−10	0	1	0
5	−3	2	0	0	1
1	−2	3	1	0	0
0	11	−22	−4	1	0
0	7	−13	−5	0	1
1	−2	3	1	0	0
0	1	−2	$-\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$	0
0	7	−13	−5	1	0
1	−2	3	1	0	0
0	1	−2	$-\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$	0
0	0	1	$-\frac{27}{11}$	$-\frac{7}{11}$	1
1	−2	0	$\frac{92}{11}$	$\frac{21}{11}$	−3
0	1	0	$-\frac{58}{11}$	$-\frac{13}{11}$	2
0	0	1	$-\frac{27}{11}$	$-\frac{7}{11}$	1
1	0	0	$-\frac{24}{11}$	$-\frac{5}{11}$	1
0	1	0	$-\frac{58}{11}$	$-\frac{13}{11}$	2
0	0	1	$-\frac{27}{11}$	$-\frac{7}{11}$	1

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{gleichzeitige Lösung des GS für drei}\\ \text{rechte Seiten}\end{array}\right.$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -24 & -5 & 11 \\ -58 & -13 & 22 \\ -27 & -7 & 11 \end{pmatrix}$$

z.B. Aufgabe 6.148 mit $a=2$, $b=0$: $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{c}$

$$\vec{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\vec{c} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -24 & -5 & 11 \\ -58 & -13 & 22 \\ -27 & -7 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -121 \\ -297 \\ -143 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -27 \\ -13 \end{pmatrix} = \frac{1}{2-1}\begin{pmatrix} 2\cdot 2+0-15 \\ -2+2\cdot 0-25 \\ 0-13 \end{pmatrix}$$