Aufgabe 6.205

Lösen Sie das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x+\ y+\ z&=\lambda\\ x+\lambda y+\ z&=\lambda\\ x+\ y+\lambda z&=\lambda \end{aligned}$$
mithilfe der Cramerschen Regel!

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+1+1-\lambda-\lambda-1=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$$

Für $\lambda=1$ ist die Determinante der Koeffizientenmatrix gleich 0 und das Gleichungssystem damit mehrdeutig lösbar oder unlösbar, anderenfalls ergibt sich mit der Cramerschen Regel

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1\\ \lambda & \lambda & 1\\ \lambda & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}=\frac{\lambda\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}=\lambda,\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}=0,\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda\\ 1 & \lambda & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}=0.$$

(Im Falle $\lambda=1$ liegt dreimal dieselbe Gleichung vor, so dass das Gleichungssystem mehrdeutig lösbar mit zwei frei wählbaren Parametern ist.)