

Aufgabe 6.204

$$\begin{aligned} \text{Lösen Sie das Gleichungssystem} \quad x - 2y + 3z &= 4 \\ 3x + y - 5z &= 5 \\ 2x - 3y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

(vgl. Aufgaben 6.101a) und 6.210 mithilfe der Cramerschen Regel!

Lösung:

Cramersche Regel: Ist A eine reguläre quadratische Matrix, so hat das Gleichungssystem $A\vec{x}=\vec{b}$ die Lösung $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$, $j=1, \dots, n$, wobei die Matrix A_j aus der Matrix A entsteht, indem man die j -te Spalte durch \vec{b} ersetzt.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 20 - 27 - 6 - 15 + 18 = -7 \quad (\text{s. Aufgabe 6.180c))$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{4} & -2 & 3 \\ \mathbf{5} & 1 & -5 \\ \mathbf{8} & -3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{12 + 80 - 45 - 24 - 60 + 30}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{4} & 3 \\ 3 & \mathbf{5} & -5 \\ 2 & \mathbf{8} & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{15 - 40 + 72 - 30 + 40 - 36}{-7} = \frac{21}{-7} = -3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & \mathbf{4} \\ 3 & 1 & \mathbf{5} \\ 2 & -3 & \mathbf{8} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{8 - 20 - 36 - 8 + 15 + 48}{-7} = \frac{7}{-7} = -1$$