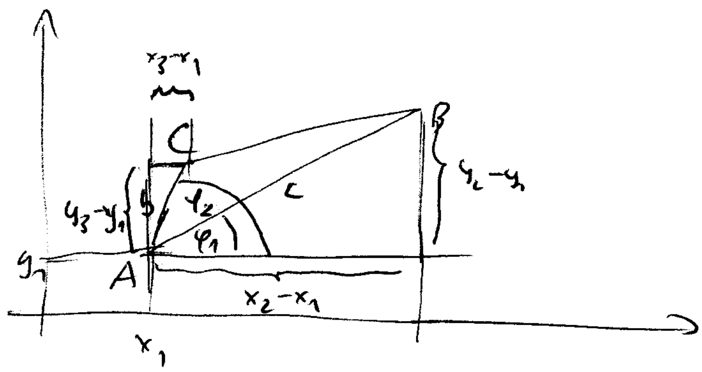
Aufgabe 6.200

Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ und $C(x_3,y_3)$. Zeigen Sie, dass sein Flächeninhalt gleich $\left|\begin{vmatrix} 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ 0 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}\right|$ ist!

Lösung:



$$\begin{vmatrix} 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ 0 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\big((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\big)$$
$$= \frac{1}{2}(c\cos\varphi_1\, b\sin\varphi_2 - b\cos\varphi_2\, c\sin\varphi_1) = \frac{1}{2}bc(\sin\varphi_2\,\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\,\sin\varphi_1)$$
$$= \frac{1}{2}bc\sin(\varphi_2-\varphi_1)$$

Der Betrag der Determinante ist gleich $\frac{1}{2}cb|\sin(\varphi_2-\varphi_1)|$. Da $b|\sin(\varphi_2-\varphi_1)|$ die Höhe auf c ist, handelt es sich dabei um den Flächeninhalt des Dreiecks.

Ferner gilt

$$(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1) = x_2y_3-x_2y_1-x_1y_3+x_1y_1-x_3y_2+x_3y_1+x_1y_2-x_1y_1$$
$$= x_2y_3+x_3y_1+x_1y_2-x_2y_1-x_1y_3-x_3y_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

so dass auch die zweite Formel bewiesen ist.