Aufgabe 6.197

Berechnen Sie $\det \boldsymbol{A}$ für $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$ unter Verwendung von $\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top\right)$!

Lösung:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top\right) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$

Es gilt $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B}$ und $\det\boldsymbol{A}^\top = \det\boldsymbol{A}$.

$\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top\right) = \det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{A}^\top = (\det\boldsymbol{A})^2$, also $\det\boldsymbol{A} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$