Aufgabe 6.196

Berechnen Sie die Determinanten, indem Sie sie auf Dreiecksform bringen:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \cdots & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \cdots & x \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & 1 \end{vmatrix}\ !$$

Lösung:

Eine Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile oder Spalte ein Vielfaches einer anderen Zeile oder Spalte addiert.

a) Zieht man die letzte Zeile von der ersten bis zur vorletzten Zeile ab, so erhält man eine untere Dreiecksmatrix mit den Hauptdiagonalelementen $1-n,\ 2-n,\ \cdots,\ -1,\ n$. Also ist

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} \begin{aligned} &= n(-1)(-2)\ldots(3-n)(2-n)(1-n) \\ &= (-1)^n 1\cdot 2\ldots(n-3)(n-2)(n-1)n \\ &= (-1)^{n-1} n!. \end{aligned}$$

b) Zieht man von jeder Zeile das x-fache der folgenden Zeile ab und lässt die letzte Zeile unverändert stehen, so erhält man eine untere Dreiecksmatrix:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1-a_{11}x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11}-a_{21}x & 1-a_{22}x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}-a_{31}x & a_{22}-a_{23}x & 1-a_{33}x & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1}-a_{n1}x & a_{n-1,2}-a_{n2}x & a_{n-1,3}-a_{n3}x & a_{n-1,4}-a_{n4}x & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(1-a_{ii}x).$$