

Aufgabe 6.193

Berechnen Sie die Determinanten

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & -8 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 7 & -8 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & -8 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \text{d) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 & 4 & -6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & 10 & 14 & -16 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 12 & 8 & 10 \end{vmatrix} ! \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & -8 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix} &= -5 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -5 \left(2 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \right) \\ &= -5(2(-20+8+12-8+48-5) - 4(4+8+12+3-4+32)) \\ &= -5(2 \cdot 35 - 4 \cdot 55) = -5(70 - 220) = -5 \cdot (-150) = 750 \end{aligned}$$

- b) Die Determinante ist gleich 0, da sie zwei gleiche Zeilen enthält. (Davon überzeugt man sich z.B. dadurch, dass die Matrix wegen der Zeilengleichheit nicht den vollen Rang hat, also existiert die inverse Matrix nicht und die Determinante ist gleich 0.)
- c) Die Determinante ist gleich $2 \cdot 750 = 1500$, da sie sich von der in a) nur dadurch unterscheidet, dass die erste Zeile mit dem Faktor 2 multipliziert ist. (Davon überzeugt man sich z.B. mithilfe des Entwicklungssatzes. Wenn alle Elemente einer Zeile bzw. Spalte mit einem konstanten Faktor multipliziert werden, so werden bei Entwicklung nach dieser Zeile bzw. Spalte alle Summanden und damit auch die gesamte Determinante mit diesem Faktor multipliziert.)
- d) Die Determinante ist gleich $2^5 \cdot 750 = 24000$, da hier gegenüber a) alle fünf Zeilen mit 2 multipliziert sind.