**Aufgabe 6.190**

Wie ändert sich eine Determinante der Ordnung $n$, wenn man

a) bei allen Elementen das Vorzeichen in das entgegengesetzte abändert,
b) jedes Element $a_{ik}$ mit $c^{i-k} (c \neq 0)$ multipliziert,
c) die erste Spalte an die Stelle der letzten setzt und jede andere Spalte um eins nach links verschiebt (Reihenfolge soll erhalten bleiben),
d) man die Zeilen in umgekehrter Reihenfolge aufschreibt?

**Lösung:**

**Multipliziert man alle Elemente einer Zeile oder einer Spalte einer Matrix mit einer Zahl, so multipliziert sich auch die Determinante mit dieser Zahl.** Ist $\boldsymbol{A}$ die Ausgangsmatrix und $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ die durch Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit $c$ entstandene Matrix, so erhält man nämlich bei Entwicklung nach dieser Zeile bzw. Spalte

$$\det(\widetilde{\boldsymbol{A}}) = \sum_{j \text{ bzw. } i} (-1)^{i+j} (ca_{ij}) \det(\text{Matrix ohne } i\text{-te Zeile}/j\text{-te Spalte})$$
$$= c \sum_{j \text{ bzw. } i} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\text{Matrix ohne } i\text{-te Zeile}/j\text{-te Spalte}) = c\det(\boldsymbol{A}).$$

**Addiert man zu einer Zeile oder Spalte das Vielfache einer anderen Zeile oder Spalte, so ändert sich die Determinate nicht.** Addiert man nämlich z.B. zur $s$-ten Zeile das $c$-fache der $t$-ten Zeile, so erhält man bei Entwicklung nach der $s$-ten Zeile

$$\det(\widetilde{\boldsymbol{A}}) = \sum_j (-1)^{s+j} (a_{sj} + ca_{tj})) \det(\text{Matrix ohne } s\text{-te Zeile}/j\text{-te Spalte})$$
$$= \sum_j (-1)^{s+j} a_{sj} \det(\text{Matrix ohne } s\text{-te Zeile}/j\text{-te Spalte})$$
$$+ c \underbrace{\sum_j (-1)^{s+j} a_{tj} \det(\text{Matrix ohne } s\text{-te Zeile}/j\text{-te Spalte})}_{=0, \text{ da Det. einer Matrix mit zwei gleichen Zeilen}} = \det(\boldsymbol{A}).$$

**Vertauscht man zwei Zeilen oder Spalten einer Matrix, so ändert die Determinante das Vorzeichen.** Davon kann man sich schrittweise mit den gerade angegebenen Eigenschaften überzeugen: Zunächst addiert man die Zeile $A$ zur Zeile $B$, man erhält eine Matrix mit den Zeilen $A$ und $A+B$ mit unveränderter Determinate. Dann zieht man die Zeile $A+B$ von der Zeile $A$ ab, auch die entstehende Matrix mit den Zeilen $-B$ und $A+B$ hat dieselbe Determinate. Anschließend addiert man die Zeile $-B$ zur Zeile $A+B$. Damit sieht man, dass die Matrix mit den Zeilen $-B$ und $A$ dieselbe Determinante wie die Ausgangsmatrix hat. Multipliziert man schließlich die Zeile $-B$ mit $-1$, so hat man eine Matrix mit gegenüber der Ausgangsmatrix getauschten Zeilen. Durch die letzte Operation ändert die Determinate ihr Vorzeichen. Diese Überlegungen gelten analog auch für Spaltentausch.

a) Da alle Zeilen der Matrix mit $-1$ multipliziert werden, ergibt sich $(-1)^n \det(\boldsymbol{A})$, d.h. für ungerade Ordnung Vorzeichenwechsel, für gerade Ordnung unveränderte Determinante.

b) $i$-te Zeile wird mit $c^i$, $j$-te Spalte wird mit $c^{-j}$ multipliziert, folglich erhält man $c^1 c^2 \dots c^n \, c^{-1} c^{-2} \dots c^{-n} \det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A})$, d.h. Determinante ändert sich nicht.

c) $n-1$ Spaltentausche erforderlich, daher $(-1)^{n-1} \det(\boldsymbol{A})$, d.h. für gerade Ordnung Vorzeichenwechsel, für ungerade Ordnung unveränderte Determinante.

d) Vertauschung der 1. mit der $n$-ten, der 2. mit der $(n-1)$-ten Spalte usw., insgesamt $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ Spalten- und damit Vorzeichenwechsel, somit ergibt sich $(-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \det(\boldsymbol{A})$.