Aufgabe 6.189

Berechnen Sie die Determinanten $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$

und $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$!

Lösung:

Für die Berechnung der Determinante der oberen Dreiecksmatrix empiehlt sich eine Entwicklung jeweils nach der ersten Spalte:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \ldots$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} \ldots a_{n-2,n-2} \begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} \ldots a_{n-2,n-2}\,a_{n-1,n-1}\,a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Die Determinante von Dreiecksmatrizen ist gleich dem Produkt der (Haupt-)Diagonalelemente.

Für die „obere Dreiecksmatrix“ bezüglich der Nebendiagonalen empiehlt sich analog eine Entwicklung jeweils nach der letzten Spalte:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} a_{1n} (-1)^n a_{2,n-1} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \cdots & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \dots$$

$$= (-1)^{n+1} a_{1n} (-1)^n a_{2,n-1} (-1)^{n-1} a_{3,n-2} \dots (-1)^4 a_{n-2,3} \begin{vmatrix} a_{n-1,1} & a_{n-1,2} \\ a_{n1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} a_{1n} (-1)^n a_{2,n-1} (-1)^{n-1} a_{3,n-2} \dots (-1)^4 a_{n-2,3} (-1)^3 a_{n-1,2}\, a_{n1}$$

$$= (-1)^{n+1} a_{1n} (-1)^n a_{2,n-1} (-1)^{n-1} a_{3,n-2} \dots (-1)^4 a_{n-2,3} (-1)^3 a_{n-1,2} (-1)^2 a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{n+1-i,i}$$

Es gilt nämlich $2+3+4+\ldots+n+(n+1) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right) - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n^2+3n+2-2}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$.

In der Folge $\left\{(-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}\right\}$ folgen immer abwechselnd 2 positive und 2 negative Vorzeichen:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
$(-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}$	+	−	−	+	+	−	−	+	+	…

Eine der beiden Zahlen n und $n+3$ ist nämlich immer gerade, die andere ungerade, so dass es für das Vorzeichen darauf ankommt, ob die gerade Zahl durch 4 teilbar ist. Ist n durch 4 teilbar, so sind $n(n+3)$ und $(n+1)(n+4)$ durch 4 teilbar, $(n+2)(n+5)$ und $(n+3)(n+6)$ dann aber nicht.

Die Vorzeichenverteilung ergibt sich deshalb, weil sich bei der fortlaufenden Multiplikation mit alternierenden Vorzeichen das Vorzeichen des Produkts nur bei jeder zweiten Multiplikation ändert.

Man beachte besonders, dass sich für 2- und 3-reihige Matrizen das von der Sarrusschen Regel bekannte Vorzeichen für das Produkt der Nebendiagonalen ergibt!