Aufgabe 6.188

Berechnen Sie die Determinanten

$$\begin{vmatrix} 2&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\7&2&3&0&0&0\\4&7&6&1&0&0\\2&5&9&4&4&0\\8&5&1&2&7&1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2&0&0&0&0&0&0\\4&1&0&0&0&0&0\\3&7&3&0&0&0&0\\5&8&5&1&0&0&0\\1&4&5&6&4&0&0\\7&2&3&4&9&1&0\\5&6&7&3&4&5&5 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2&0&0&0&0&0&0&0\\7&1&0&0&0&0&0&0\\4&6&3&0&0&0&0&0\\3&7&5&1&0&0&0&0\\9&2&4&5&4&0&0&0\\2&7&3&9&5&1&0&0\\6&4&1&8&7&9&5&0\\5&8&3&2&4&5&9&1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&2\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&3&2&7\\0&0&1&6&7&4\\0&4&4&9&5&2\\1&7&2&1&5&8 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0&1&4\\0&0&0&0&3&7&3\\0&0&0&1&5&8&5\\0&0&4&6&5&4&1\\0&1&9&4&3&2&7\\5&5&4&3&7&6&5 \end{vmatrix} \quad\text{und}\quad \begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0&0&1&7\\0&0&0&0&0&3&6&4\\0&0&0&0&1&5&7&3\\0&0&0&4&5&4&2&9\\0&0&1&5&9&3&7&2\\0&5&9&7&8&1&4&6\\1&9&5&4&2&3&8&5 \end{vmatrix}\ !$$

Lösung:

Entwicklung jeweils nach der ersten Zeile ergibt

$$\begin{vmatrix} 2&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\7&2&3&0&0&0\\4&7&6&1&0&0\\2&5&9&4&4&0\\8&5&1&2&7&1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1&0&0&0&0\\2&3&0&0&0\\7&6&1&0&0\\5&9&4&4&0\\5&1&2&7&1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\begin{vmatrix} 3&0&0&0\\6&1&0&0\\9&4&4&0\\1&2&7&1 \end{vmatrix} = \cdots = 2\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 4\cdot 1 = 24$$

und analog

$$\begin{vmatrix} 2&0&0&0&0&0&0\\4&1&0&0&0&0&0\\3&7&3&0&0&0&0\\5&8&5&1&0&0&0\\1&4&5&6&4&0&0\\7&2&3&4&9&1&0\\5&6&7&3&4&5&5 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 4\cdot 1\cdot 5 = 120,$$

$$\begin{vmatrix} 2&0&0&0&0&0&0&0\\7&1&0&0&0&0&0&0\\4&6&3&0&0&0&0&0\\3&7&5&1&0&0&0&0\\9&2&4&5&4&0&0&0\\2&7&3&9&5&1&0&0\\6&4&1&8&7&9&5&0\\5&8&3&2&4&5&9&1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 4\cdot 1\cdot 5\cdot 1 = 120$$

(Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt der (Haupt)Diagonalelemente.)

Für die „Dreicksmatrizen“ bezüglich der Nebendiagonalen erhält man durch Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&2\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&3&2&7\\ 0&0&1&6&7&4\\ 0&4&4&9&5&2\\ 1&7&2&1&5&8 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&3&2\\ 0&0&1&6&7\\ 0&4&4&9&5\\ 1&7&2&1&5 \end{vmatrix} = -2\cdot 1\begin{vmatrix} 0&0&0&3\\ 0&0&1&6\\ 0&4&4&9\\ 1&7&2&1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= \ldots\\ &= -2\cdot 1\cdot(-3)\cdot 1\cdot(-4)\cdot 1\\ &= -24, \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&0&2\\ 0&0&0&0&0&1&4\\ 0&0&0&0&3&7&3\\ 0&0&0&1&5&8&5\\ 0&0&4&6&5&4&1\\ 0&1&9&4&3&2&7\\ 5&5&4&3&7&6&5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&3&7\\ 0&0&0&1&5&8\\ 0&0&4&6&5&4\\ 0&1&9&4&3&2\\ 5&5&4&3&7&6 \end{vmatrix} = \cdots = 2\cdot(-1)\cdot 3\cdot(-1)\cdot 4\cdot(-1)\cdot 5 = -120$$

und

$$\begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&2\\ 0&0&0&0&0&0&1&7\\ 0&0&0&0&0&3&6&4\\ 0&0&0&0&1&5&7&3\\ 0&0&0&4&5&4&2&9\\ 0&0&1&5&9&3&7&2\\ 0&5&9&7&8&1&4&6\\ 1&9&5&4&2&3&8&5 \end{vmatrix} = -2\cdot 1\cdot(-3)\cdot 1\cdot(-4)\cdot 1\cdot(-5)\cdot 1 = 120.$$

(Man beachte besonders das positive Vorzeichen bei der achtreihigen Matrix! Auch für vier- und fünfreihige „Dreiecksmatrizen“ bezüglich der Nebendiagonalen erhält man als Determinante das Produkt der Nebendiagonalelemente. Die Sarrussche Regel, nach der vor das Produkt der Nebendiagonalelemente ein Minus zu setzen ist, gilt **nur** für zwei- und dreireihige Matrizen!)