

Aufgabe 6.184

Berechnen Sie durch Entwicklung die Determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & c & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -4 & 0 & 0 \\ b & 2 & 3 & 1 & b & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 7 & b & -2 & 7 \end{vmatrix} !$$

Für welche Werte der Parameter a , b und c verschwindet die Determinante?

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & c & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -4 & 0 & 0 \\ b & 2 & 3 & 1 & b & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 1 & b \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 6 & 3 & 7 & b & -2 & 7 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 5 & 0 & c & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ b & 2 & 3 & b & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & b \\ 6 & 3 & 7 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2a \begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ b & 2 & b & 10 \\ 3 & 1 & 1 & b \\ 6 & 3 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 10a \begin{vmatrix} 2 & b & 10 \\ 1 & 1 & b \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 10a(14 + 3b^2 - 20 - 30 - 7b + 4b) = 10a(3b^2 - 3b - 36)$$

$$= 30a(b^2 - b - 12) = \underline{\underline{30a(b-4)(b+3)}}$$

Das quadratische Polynom $b^2 - b - 12$ hat die Nullstellen $b_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{48}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$.

Offensichtlich verschwindet die Determinante genau dann, wenn $a=0$, $b=4$ oder $b=-3$ ist.