Aufgabe 6.176

Ein Produkt wird von zwei Produzenten in unterschiedlichen Qualitäten hergestellt und zu Preisen p_1 bzw. p_2 verkauft. Die Nachfragefunktionen lauten $N_1 = -p_1 + p_2 + 5$ und $N_2 = p_1 - p_2 + 15$, während die Angebotsfunktionen $A_1 = 3p_1 - a$ und $A_2 = 5p_2 - b$ seien.

a) Ermitteln Sie mittels Matrizeninversion, wie sich der Vektor der Gleichgewichtspreise $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ aus dem Vektor des festen Aufwands $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ errechnet!

b) Für welche Preise stehen im Fall $a = 9,\ b = 39$ Angebot und Nachfrage im Gleichgewicht?

Lösung:

a) Gleichgewicht von Angebot und Nachfrage:

$$\begin{array}{llll} A_1 = N_1: & 3p_1 - a = -p_1 + p_2 + \ \ 5 & \qquad 4p_1 - \ \ p_2 = a + \ \ 5 \\ A_2 = N_2: & 5p_2 - b = \ \ p_1 - p_2 + 15 & \qquad -p_1 + 6p_2 = b + 15 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} \right)$$

$$\left(\boldsymbol{A}\vec{p} = \vec{c} \iff \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\vec{p} = \boldsymbol{A}^{-1}\vec{c},\ \boldsymbol{E}\vec{p} = \vec{p} = \boldsymbol{A}^{-1}\vec{c}\ \ (\textbf{nicht } \vec{c}\boldsymbol{A}^{-1}, \text{ da nicht kommutativ}) \right)$$

Mit dem Ergebnis von Aufgabe 6.175a) ergibt sich $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 45/23 \\ 65/23 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 39 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 39 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{45}{23} \\ \frac{65}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{93}{23} \\ \frac{165}{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{45}{23} \\ \frac{65}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{138}{23} \\ \frac{230}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

Also stehen Angebot und Nachfrage bei $p_1 = 6,\ p_2 = 10$ im Gleichgewicht.