Aufgabe 6.173

Die Ebenen E_1, E_2 und E_3 haben die Normalenvektoren $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, sie schneiden die x-Achse für $x=a$, $x=b$ bzw. $x=c$. Bestimmen Sie mithilfe des Gaußschen Algorithmus die Matrix $\boldsymbol{A}$ so, dass die Koordinaten des Schnittpunkts (x,y,z) der 3 Ebenen durch $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ berechnet werden!

Lösung:

Da die Ebenen E_1, E_2 und E_3 die Punkte $(a,0,0)$, $(b,0,0)$ bzw. $(c,0,0)$ enthalten, lauten ihre Gleichungen $x+3y+2z=a$, $x-y+2z=b$ bzw. $x+2y-z=c$. Der Schnittpunkt der 3 Ebenen wird also durch Lösung des Gleichungssystems $\begin{pmatrix}1&3&2\\1&-1&2\\1&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ bestimmt. Dessen Koeffizientenmatrix muss somit invertiert werden:

$$\begin{array}{rrr|rrr}
1&3&2&1&0&0\\
1&-1&2&0&1&0\\
1&2&-1&0&0&1\\ \hline
1&3&2&1&0&0\\
0&-4&0&-1&1&0\\
0&-1&-3&-1&0&1\\ \hline
1&3&2&1&0&0\\
0&1&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&0\\
0&-1&-3&-1&0&1\\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|rrr}
1&3&2&1&0&0\\
0&1&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&0\\
0&0&-3&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&1\\ \hline
1&3&2&1&0&0\\
0&1&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&0\\
0&0&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{12}&-\frac{1}{3}\\ \hline
1&3&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&\frac{2}{3}\\
0&1&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&0\\
0&0&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{12}&-\frac{1}{3}\\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|rrr}
1&0&0&-\frac{1}{4}&\frac{7}{12}&\frac{2}{3}\\
0&1&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&0\\
0&0&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{12}&-\frac{1}{3}
\end{array}$$

Also gilt $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ mit $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{7}{12}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{12}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-3&7&8\\3&-3&0\\3&1&-4\end{pmatrix}$.