Aufgabe 6.172

Gesucht ist das komplexe quadratische Polynom $P_2(z)=(a_0+b_0\mathrm{i})+(a_1+b_1\mathrm{i})z+(a_2+b_2\mathrm{i})z^2$, für das $P_2(1)=8-6\mathrm{i}$, $P_2(\mathrm{i})=5+\mathrm{i}$ und $P_2(1+\mathrm{i})=12-\mathrm{i}$ gilt. Stellen Sie dazu durch Trennung der drei Gleichungen in Real- und Imaginärteil ein Gleichungssystem für die Koeffizienten a_0, b_0, a_1, b_1, a_2 und b_2 auf und lösen Sie dieses mit dem Gaußschen Algorithmus!

Lösung:

$$P_2(1)=(a_0+b_0\mathrm{i})+(a_1+b_1\mathrm{i})z+(a_2+b_2\mathrm{i})=(a_0+a_1+a_2)+(b_0+b_1+b_2)\mathrm{i}=8-6\mathrm{i},$$
$$\text{d.h. } a_0+a_1+a_2=8,\quad b_0+b_1+b_2=-6$$

$$P_2(\mathrm{i})=(a_0+b_0\mathrm{i})+(a_1+b_1\mathrm{i})\mathrm{i}+(a_2+b_2\mathrm{i})\mathrm{i}^2=a_0+b_0\mathrm{i}+a_1\mathrm{i}-b_1-a_2-b_2\mathrm{i}$$
$$=(a_0-b_1-a_2)+(b_0+a_1-b_2)\mathrm{i}=5+\mathrm{i},$$
$$\text{d.h. } a_0-b_1-a_2=5,\quad b_0+a_1-b_2=1$$

$$P_2(1+\mathrm{i})=(a_0+b_0\mathrm{i})+(a_1+b_1\mathrm{i})(1+\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})^2=(a_0+b_0\mathrm{i})+(a_1+b_1\mathrm{i})(1+\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i})\,2\mathrm{i}$$
$$=a_0+b_0\mathrm{i}+a_1+b_1\mathrm{i}+a_1\mathrm{i}-b_1+2a_2\mathrm{i}-2b_2=(a_0+a_1-b_1-2b_2)+(b_0+a_1+b_1+2a_2)\mathrm{i}=12-\mathrm{i},$$
$$\text{d.h. } a_0+a_1-b_1-2b_2=12,\quad b_0+a_1+b_1+2a_2=-1$$

Gleichungssystem:
$$\begin{array}{rrrrrrcr}
a_0 & & +a_1 & & +a_2 & & = & 8\\
 & b_0 & & +b_1 & & +b_2 & = & -6\\
a_0 & & & -b_1 & -a_2 & & = & 5\\
 & b_0 & +a_1 & & & -b_2 & = & 1\\
a_0 & & +a_1 & -b_1 & & -2b_2 & = & 12\\
 & b_0 & +a_1 & +b_1 & +2a_2 & & = & -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
\mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -6\\
1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 5\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1\\
1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 12\\
0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1\\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8\\
\mathbf{0} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -6\\
\mathbf{0} & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -3\\
\mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1\\
\mathbf{0} & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 4\\
\mathbf{0} & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1\\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8\\
0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & -6\\
0 & \mathbf{0} & -1 & -1 & -2 & 0 & -3\\
0 & \mathbf{0} & 1 & -1 & 0 & -2 & 7\\
0 & \mathbf{0} & 0 & -1 & -1 & -2 & 4\\
0 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 2 & -1 & 5\\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -6\\
0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 & 3\\
0 & 0 & \mathbf{0} & -2 & -2 & -2 & 4\\
0 & 0 & \mathbf{0} & -1 & -1 & -2 & 4\\
0 & 0 & \mathbf{0} & -1 & 0 & -1 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -6\\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3\\
0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & -2\\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 4\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2\\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -6\\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2\\
0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & -1 & 2\\
0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0\\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -6\\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2\\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -2\\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 8\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & -4\\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & \mathbf{0} & 3\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 8\\
0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & -4\\
0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 3\\
0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\
\hline
1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 8\\
0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & -4\\
0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 3\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\
\hline
1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 5\\
0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & -4\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2
\end{array}$$

Somit ist $a_0=5$, $b_0=-4$, $a_1=3$, $b_1=0$, $a_2=0$, $b_2=-2$, so dass das gesuchte komplexe quadratische Polynom $P_2(z)=(5-4\mathrm{i})+3z-2\mathrm{i}z^2$ ist.