

### Aufgabe 6.171

- a) Bestimmen Sie die Koeffizienten aller „trigonometrischen Polynome zweiten Grades“  
 $T_2(x) = a + b \cos x + c \sin x + d \cos 2x + e \sin 2x$ , die an den Stellen  $x = 0, \pi/2, \pi$  in dieser Reihenfolge die Werte 4, 5 und 6 annehmen!
- b) Welches trigonometrische Polynom ersten Grades hat die beschriebenen Eigenschaften?
- c) Welches trigonometrische Polynom zweiten Grades nimmt neben den angegebenen Werten auch noch an den Stellen  $3\pi/4$  bzw.  $3\pi/2$  die Werte  $-7$  bzw.  $7$  an?

### Lösung:

a)  $T_2(x) = a + b \cos x + c \sin x + d \cos 2x + e \sin 2x$

$$\begin{aligned} T_2(0) &= a + b && + d && = 4 \\ T_2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= a && + c && - d && = 5 \\ T_2(\pi) &= a - b && + d && = 6 \end{aligned}$$

1	1	0	1	0	4	1	1	0	1	0	4	$a + d = 5, \quad a = 5 - d$ $b = -1, \quad b = -1,$ $c - 2d = 0, \quad c = 2d$
1	0	1	-1	0	5	0	1	0	0	0	-1	
1	-1	0	1	0	6	0	0	1	-2	0	0	
1	1	0	1	0	4	1	0	0	1	0	5	
0	-1	1	-1	0	1	0	1	0	0	0	-1	
0	-2	0	0	0	2	0	0	1	-2	0	0	
1	1	0	1	0	4							
0	1	0	0	0	-1							
0	-1	1	-2	0	1							

Die Lösung des Gleichungssystems ist also

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit belie-$$

bigem reellen  $d$  und  $e$ .

Die geforderten Eigenschaften haben damit alle trigonometrischen Polynome

$$T_2(x) = 5 - d - \cos x + 2d \sin x + d \cos 2x + e \sin 2x.$$

- b) Damit es sich um ein trigonometrisches Polynom ersten Grades handelt, muss  $d = e = 0$  sein, so dass sich als Lösung das Polynom  $T_1(x) = 5 - \cos x$  ergibt.

c)  $T_2(x) = 5 - d - \cos x + 2d \sin x + d \cos 2x + e \sin 2x$

$$T_2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 5 - d + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}d - e = -7$$

$$T_2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 5 - d - 2d - d = 7, \quad 5 - 4d = 7, \quad 4d = -2, \quad d = -\frac{1}{2}$$

Mit  $d = -\frac{1}{2}$  ergibt sich  $T_2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} - e = -7$  und damit  $e = \frac{25}{2}$ .

Das gesuchte Polynom ist somit  $T_2(x) = \frac{11}{2} - \cos x - \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{25}{2} \sin 2x$ .