Aufgabe 6.167

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten aller Polynome höchstens fünften Grades $P_5(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5$, die an den Stellen $x=-2,\,-1,\,0,\,1$ und 2 in dieser Reihenfolge die Werte $74,\,12,\,4,\,2$ und -18 annehmen!

b) Welches Polynom vierten Grades hat die beschriebenen Eigenschaften?

Lösung:

a)
$$\begin{array}{lll}
P_5(0) & =a & =4\\
P_5(1) & =a+b+c+d+e+f & =2\\
P_5(-1) & =a-b+c-d+e-f & =12\\
P_5(-2) & =a+2b+4c+8d+16e+32f & =-18\\
P_5(2) & =a-2b+4c-8d+16e-32f & =74
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2\\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 12\\
1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & -18\\
1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 & 74\\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2\\
0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 8\\
0 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & -22\\
0 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 & 70\\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2\\
0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 6\\
0 & 0 & 2 & 6 & 14 & 30 & -18\\
0 & 0 & 6 & -6 & 18 & -30 & 66\\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\
0 & 0 & 0 & 6 & 12 & 30 & -24\\
0 & 0 & 0 & -6 & 12 & -30 & 48\\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & -4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 24\\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & -4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -3\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -6\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -6\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -6\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
a & =4\\
b-4f & =1\\
c & =2\\
d+5f & =-6\\
e & =1
\end{array}$$

Mit $f=\lambda$ erhält man als Lösung des Gleichungssystems $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\\-6\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\4\\0\\-5\\0\\1\end{pmatrix}$.

Alle Polynome $P_5(x)=4+(1+4\lambda)x+2x^2-(6+5\lambda)x^3+x^4+\lambda x^5$ haben die beschriebenen Eigenschaften.

b) Damit es sich um ein Polynom vierten Grades handelt, muss $f=\lambda=0$ sein. Folglich ist $P_4(x)=4+x+2x^2-6x^3+x^4$ das gesuchte Polynom.