Aufgabe 6.166

Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 10 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

a) Welcher Bedingung müssen die Komponenten des Vektors $\vec{r}$ genügen, damit das Gleichungssystem lösbar ist?

b) Lösen Sie das Gleichungssystem für die spezielle rechte Seite $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$!

Lösung:

a)

$$\begin{array}{rrrrr|c}
1 & 2 & -1 & 0 & 4 & a \\
1 & 4 & -5 & 1 & 3 & b \\
2 & -2 & 10 & 1 & -1 & c \\
5 & 6 & 3 & 2 & 10 & d \\
\hline
1 & 2 & -1 & 0 & 4 & a \\
0 & 2 & -4 & 1 & -1 & b-a \\
0 & -6 & 12 & 1 & -9 & c-2a \\
0 & -4 & 8 & 2 & -10 & d-5a \\
\hline
1 & 2 & -1 & 0 & 4 & a \\
0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{b-a}{2} \\
0 & 0 & 0 & 4 & -12 & c-2a+3(b-a) \\
0 & 0 & 0 & 4 & -12 & d-5a+2(b-a) \\
\hline
1 & 2 & -1 & 0 & 4 & a \\
0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{b-a}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{-5a+3b+c}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d-2a-b-c \\
\hline
\end{array}$$

Das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $d-2a-b-c=0$, d.h. $d=2a+b+c$ ist.

b) Die gegebene rechte Seite erfüllt die in a) hergeleitete Bedingung, das Einsetzen der konkreten Werte ergibt

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & -1 & 0 & 4 & 2 \\
0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\
\hline
1 & 2 & -1 & 0 & 4 & 2 \\
0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 4 \\
0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1
\end{array}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$