

Aufgabe 6.162

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 &= 17 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + \lambda x_4 &= \mu \end{aligned}$$

- a) Lösen Sie das Gleichungssystem im Spezialfall $\lambda = -3, \mu = 5$ mit dem Gaußschen Algorithmus!
 b) Für welche Werte der Parameter λ und μ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar bzw. unlösbar?

Lösung:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 17 \\ 3 & -3 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & -3 & 5 \\ \hline 1 & -1 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -22 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -15 \\ \hline 1 & -1 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -10 \\ \hline 1 & -1 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \end{array}$$

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 1$$

$$\begin{array}{l} \text{b) letzte Zeile: } \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & \lambda & \mu \\ \hline 0 & 5 & -5 & \lambda - 2 & \mu - 20 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda - 7 & \mu - 15 \end{array} \end{array}$$

- d.h. für $\lambda \neq 7$ eindeutig lösbar
 für $\lambda = 7, \mu = 15$ mehrdeutig lösbar,
 für $\lambda = 7, \mu \neq 15$ unlösbar