Aufgabe 6.160

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 12x_2 + 5x_3 + \lambda x_4 &= \mu . \end{aligned}$$

a) Lösen Sie das Gleichungssystem im Spezialfall $\lambda = 5$, $\mu = 11$ mit dem Gaußschen Algorithmus!

b) Für welche Werte der Parameter λ und μ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar bzw. unlösbar?

Lösung:

a) Gaußscher Algorithmus:

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\
2 & 1 & 4 & 3 & 9 \\
3 & 9 & 1 & 2 & 1 \\
4 & 12 & 5 & 5 & 11 \\ \hline
1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\
0 & -5 & 0 & -5 & -5 \\
0 & 0 & -5 & -10 & -20 \\
0 & 0 & -3 & -11 & -17 \\ \hline
1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 3 & 11 & 17 \\ \hline
1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ \hline
1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
\qquad x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1$$

(Dieser Spezialfall wird (mit getauschten Variablen x_2 und x_3) auch in Aufgabe 6.120 gelöst.)

b) Für die letzte Zeile in obigem Schema ergibt sich

4	12	5	λ	μ
0	0	-3	$\lambda-16$	$\mu-28$
0	0	3	$16-\lambda$	$28-\mu$
0	0	0	$10-\lambda$	$16-\mu$

Also ist das Gleichungssystem für $\lambda \neq 10$ eindeutig lösbar, für $\lambda = 10,\ \mu = 16$ mehrdeutig lösbar und für $\lambda = 10,\ \mu \neq 16$ unlösbar.