## Aufgabe 6.159

a) Wenden Sie den Gaußschen Algorithmus auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 &+& x_2 &-& x_3 &+& 2x_4 &=& -8 \\ x_1 &+& 2x_2 &+& x_3 &-& x_4 &=& 13 \\ 2x_1 &+& x_2 &+& 2x_3 &+& x_4 &=& 11 \\ 3x_1 &+& 4x_2 &+& 5x_3 &-& 3x_4 &=& \lambda \end{array} \quad \text{an!}$$

b) Für welche Werte des Parameters $\lambda$ ist das Gleichungssystem lösbar?

c) Ermitteln Sie im Falle der Lösbarkeit die allgemeine Lösung des Gleichungssystems!

d) Geben Sie die allgemeine Lösung des zugehörigen homogen Gleichungssystems an!

**Lösung:**

a)

$$\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 1 & -1 & 2 & -8 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 13 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & -3 & \lambda \\ \hline 1 & 1 & -1 & 2 & -8 \\ \mathbf{0} & 1 & 2 & -3 & 21 \\ \mathbf{0} & -1 & 4 & -3 & 27 \\ \mathbf{0} & 1 & 8 & -9 & \lambda+24 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -3 & 21 \\ 0 & \mathbf{0} & 6 & -6 & 48 \\ 0 & \mathbf{0} & 6 & -6 & \lambda+3 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 21 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 8 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & \lambda-45 \end{array}$$

b) Das Gleichungssystem ist nur für $\lambda = 45$ lösbar, da nur dann $\lambda - 45 = 0$ ist.

c) Für $\lambda = 45$ erhält man

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ \hline 1 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ \hline 1 & \mathbf{0} & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} x_1 + 2x_4 = -5, & x_1 = -5 - 2x_4 \\ x_2 - x_4 = 5, & x_2 = 5 + x_4 \\ x_3 - x_4 = 8, & x_3 = 8 + x_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left( = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

d) Da sich die bei c) ermittelte allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems aus spezieller Lösung des inhomogenen Systems und allgemeiner Lösung des homogenen Systems zusammensetzt, ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems.