Aufgabe 6.154

Für welche Werte der Parameter a und b hat das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x-2y+3z&=-4\\ 2x+\ y+\ z&=\ \ 2\\ x+ay+2z&=\ \ b \end{aligned}$$
keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen? Berechnen Sie die ggf. existierenden Lösungen! Interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch!

Lösung:

$$\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & -2 & 3 & -4\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & a & 2 & b\\ \hline 1 & -2 & 3 & -4\\ \mathbf{0} & 5 & -5 & 10\\ \mathbf{0} & a+2 & -1 & b+4\\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2\\ 0 & a+2 & -1 & b+4\\ \hline 1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & \mathbf{0} & a+1 & b-2a \end{array}$$

für $a\neq-1$ $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\vec{c})=3 \implies$ genau eine Lösung,
für $a=-1,\ b=-2$ gilt $b-2a=0,\ \operatorname{rang}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\vec{c})=2$
$\implies$ unendlich viele Lösungen ($3-\operatorname{rang}(\boldsymbol{A})=1$ frei wählbarer Parameter),
für $a=-1,\ b\neq-2$ gilt $b-2a\neq0,\ \operatorname{rang}(\boldsymbol{A})=2\neq\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\vec{c})=3 \implies$ keine Lösung

Im Falle $\underline{a\neq-1}$ ergibt die Rückwärtselimination

$$\begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{b-2a}{a+1}\\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & \mathbf{0} & \frac{2a-3b-4}{a+1}\\ 0 & 1 & \mathbf{0} & \frac{b+2}{a+1}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-2a}{a+1}\\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|c} 1 & \mathbf{0} & 0 & \frac{2a-b}{a+1}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{b+2}{a+1}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-2a}{a+1} \end{array}$$

Somit lautet dann die Lösung $x=\dfrac{2a-b}{a+1},\ y=\dfrac{b+2}{a+1},\ z=\dfrac{b-2a}{a+1}$. Geometrisch kann das so interpretiert werden, dass sich die durch die drei Gleichungen gegebenen Ebenen in diesem Punkt schneiden.

Im Falle $\underline{a=-1,\ b=-2}$ ergibt die Rückwärtselimination

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|l} 1 & \mathbf{0} & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} x+z=0, & x=-z\\ y-z=2, & y=\ \ z+2 \end{array}$$

Lösung ist also $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$. Geometrisch kann das so interpretiert werden, dass sich die durch die drei Gleichungen gegebenen Ebenen in dieser Gerade schneiden. Die Schnittgerade von zwei Ebenen liegt also in der dritten Ebene, so dass sich in dieser Gerade alle drei Ebenen schneiden.

Im Falle $\underline{a=-1,\ b\neq-2}$ schließlich ist die Unlösbarkeit des Gleichungssystems geometrisch dahingehend zu interpretieren, dass die dritte Ebene echt parallel zur Schnittgeraden von zwei Ebenen ist, so dass die drei Ebenen keinen gemeinsamen Punkt haben.