Aufgabe 6.152

Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -3x+4y+\ \ z&=2\\ x-\ \ y+2z&=5\\ -4x+7y+az&=b \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von den Parametern a und b !

Geben Sie jeweils auch die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix an und stellen Sie den Zusammenhang zu den Lösbarkeitseigenschaften der Gleichungssysteme dar! Interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch!

Lösung:

Zur Erleichterung der Rechnung werden die erste und die zweite Zeile getauscht.

$$\begin{array}{rrr|c l}
\mathbf{1} & -1 & 2 & 5 & \\
-3 & 4 & 1 & 2 & \mathrm{II}+3\cdot\mathrm{I}\\
-4 & 7 & a & b & \mathrm{III}+4\cdot\mathrm{I}\\ \hline
1 & -1 & 2 & 5 & \\
\mathbf{0} & 1 & 7 & 17 & \\
\mathbf{0} & 3 & a+8 & b+20 & \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{II}\\ \hline
1 & -1 & 2 & 5 & \\
0 & 1 & 7 & 17 & \\
0 & \mathbf{0} & a-13 & b-31 & \frac{1}{a-13}\cdot\mathrm{III}\quad \underline{\text{falls } a\neq 13}\\ \hline
1 & -1 & 2 & 5 & \mathrm{I}-2\cdot\mathrm{III}\\
0 & 1 & 7 & 17 & \mathrm{II}-7\cdot\mathrm{III}\\
0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{b-31}{a-13} & \\ \hline
1 & -1 & \mathbf{0} & \frac{5a-2b-3}{a-13} & \mathrm{I}+\mathrm{II}\\
0 & 1 & \mathbf{0} & \frac{17a-7b-4}{a-13} & \\
0 & 0 & 1 & \frac{b-31}{a-13} & \\ \hline
1 & \mathbf{0} & 0 & \frac{22a-9b-7}{a-13} & \\
0 & 1 & 0 & \frac{17a-7b-4}{a-13} & \\
0 & 0 & 1 & \frac{b-31}{a-13} &
\end{array}$$

$$x=\frac{22a-9b-7}{a-13},\ y=\frac{17a-7b-4}{a-13},\ z=\frac{b-31}{a-13}$$

Der Fall $\underline{a=13}$ muss gesondert behandelt werden. In diesem lautet das Schema im 3. Schritt

$$\begin{array}{rrr|c l}
1 & -1 & 2 & 5 & \\
0 & 1 & 7 & 17 & \\
0 & \mathbf{0} & 0 & b-31 & \text{für } \underline{b\neq 31}\ \text{ Widerspruch: } 0x+0y+0z=b-31 \implies \text{GS unlösbar}
\end{array}$$

Abschließend muss noch der Fall $\underline{a=13,\, b=31}$ behandelt werden. In diesem ergibt sich

$$\begin{array}{rrr|c l}
1 & -1 & 2 & 5 & \mathrm{I}+\mathrm{II}\\
0 & 1 & 7 & 17 & \\
0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & \text{Nullzeile: } 0x+0y+0z=0\text{, gilt immer, kann gestrichen werden}\\ \hline
1 & \mathbf{0} & 9 & 22 & \\
0 & 1 & 7 & 17 & \text{Zeilenstufenform, 1 frei wählbarer Parameter (zweckmäßig: } z=t)
\end{array}$$

$x+9z=22: \quad x=22-9z=22-9t$
$y+7z=17: \quad y=17-7z=17-7t$

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 22\\ 17\\ 0\end{pmatrix}}_{\substack{\text{spez. Lsg}\\ \text{inhom. GS}}} + t\underbrace{\begin{pmatrix} -9\\ -7\\ 1\end{pmatrix}}_{\substack{\text{allg.Lsg}\\ \text{hom. GS}}}$$

Rangbetrachtungen für das Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$:

$a\neq 13:$ $\quad \underbrace{\operatorname{rang}(\boldsymbol{A})}_{\substack{\text{Koeff.-}\\ \text{matrix}}} = \underbrace{\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\vec{b})}_{\substack{\text{erw. Koeff.-}\\ \text{matrix}}} = 3 = n \implies$ Gleichungssystem eindeutig lösbar

$a=13,\ b\neq 31:$ $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) = 2 \neq \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\vec{b}) = 3 \implies$ Gleichungssystem unlösbar

$a=13,\ b=31:$ $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}|\vec{b}) = 2 < n = 3 \implies$ Gleichungssystem mehrdeutig lösbar,
$n-\operatorname{rang}(\boldsymbol{A})=1$ frei wählbarer Parameter

Geometrische Interpretation: Lagebeziehung zwischen 3 Ebenen

$a\neq 13:$ Die 3 Ebenen schneiden sich in einem Punkt.

$a=13,\ b\neq 31:$ Die Schnittgerade der beiden ersten Ebenen ist zur 3. Ebene (echt) parallel, so dass die 3 Ebenen keinen gemeinsamen Punkt haben.

$a=13,\ b=31:$ Die Schnittgerade der beiden ersten Ebenen liegt in der 3. Ebene, ist also Lösung.